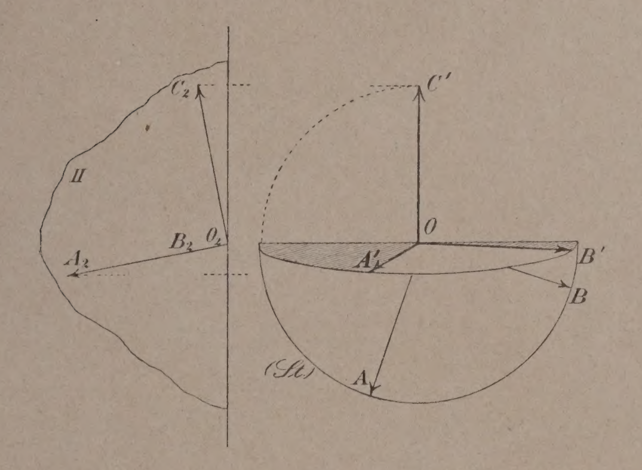
NEUER BEWEIS

FÜR

DEN WEISBACHSCHEN HAUPTSATZ

DER

NORMAL-AXONOMETRIE.



DAZU ALS EINLEITUNG

EINE VERGLEICHENDE WERTSCHÄTZUNG DER GEBRÄUCHLICHEN PROJEKTIONSARTEN FÜR DEN ERSTEN UNTERRICHT.

VON

J. E. BÖTTCHER.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1893.



HERRN

GEHEIMEN HOFRAT PROFESSOR DOCTOR

CARL NEUMANN,

DEM HERVORRAGENDEN FORSCHER,
DEM UNVERGESSLICH ANREGENDEN LEHRER,
DEM VÄTERLICHEN BERATER SEINER SCHÜLER,

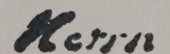
BRINGT

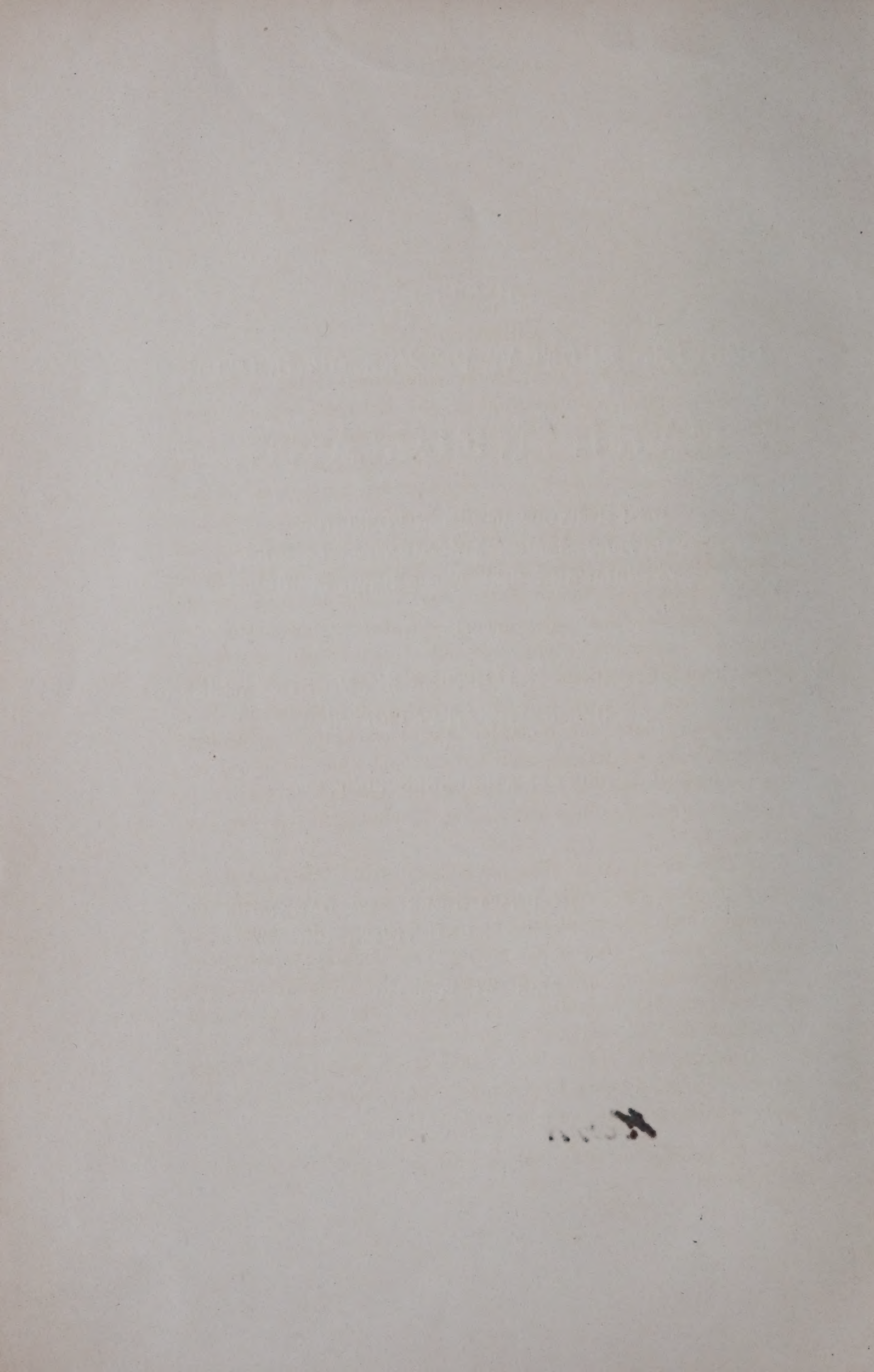
BEIM ABSCHLUSS SEINES 25JÄHRIGEN GESEGNETEN WIRKENS
AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

DIESE SEHR BESCHEIDENEN BLÄTTER

IN UNWANDELBARER DANKBARKEIT
UND VEREHRUNG

SEIN ÄLTESTER LEIPZIGER FAMULUS.





I.

Einleitung.

(1. Die Zwecke der Projektionsarten.) Die Geometer, Krystallographen und Geographen, die Erbauer von allerhand Gebäuden und Geräten sind von jeher genötigt gewesen, körperliche Gestalten auf ebener Fläche gesetzmäſsig abzubilden oder sie zu projicieren; einerlei, ob sich's dabei um schon vorhandene Gegenstände oder um solche handle, die erst entstehen sollen — es sei, wie Albrecht Dürer*) sich ausdrückt, „eyn newerdachts oder forgemachts ding". Am meisten im Gebrauche sind gegenwärtig folgende Arten von Abbildern: zunächst die Ausdrucksmittel der darstellenden Geometrie (géométrie descriptive) im engern Sinne, nämlich Grund- und Aufriſs, nebst ihren Hülfsfiguren, den Seitenrissen, Durchschnitten, Umlegungen und Netzen; sodann Parallelprojektionen, bald mit schiefer, bald mit normaler Strahlenrichtung konstruiert, bald angelehnt an Grund- und Aufriſs, bald ohne diese auf sogenanntem axonometrischen Wege erzeugt; endlich die Centralprojektionen oder perspektivischen Zeichnungen, wie bei den Malern.

Schon die Buntheit dieser Ausdrucksmittel läſst mit Recht vermuten, daſs die Projektionszeichner je nach Umständen verschiedene Zwecke verfolgen; und je nachdem der eine oder andere Zweck vorherrscht, werden sich auch verschiedene Projektionsverfahren nötig machen. In der That pflegt man an geometrische Abbilder hauptsächlich drei Anforderungen zu stellen, die oft einander widerstreiten: Man wünscht

erstens, das Bild solle anschaulich sein, so daſs man aus ihm den räumlichen Gegenstand, der gemeint ist, rasch und sicher wieder erkenne; es soll auch

*) Im Eingang zu seiner Underweysung der messung mit dem zirckel vnd richtscheyt . . vom Jahre 1525.

zweitens leicht meſsbar sein, so daſs aus der fertigen Zeichnung die wahren Längen sämtlicher Strecken im Raum ohne viel Umschweif entnommen werden können (wie es namentlich bei den Werkzeichnungen unerläſslich ist); und zu alledem möchte man am liebsten

drittens, daſs das Bild bequem konstruierbar sei.

(2. Anwendbarkeit der Perspektive.) Die anschaulichsten und schönsten Bilder wird man unstreitig dann bekommen, wenn sich das Projektionsverfahren so eng wie möglich an den Vorgang des menschlichen Sehens anschlieſst. Dies thut die Perspektive, und darum wird sie überall da unersetzlich bleiben, wo es zumeist auf einen unmittelbaren Eindruck ankommt. Leider aber ist die Herstellung perspektivischer Bilder die mindest einfache und oft noch dadurch erschwert, daſs die Fluchtpunkte über den Rand des Zeichenblattes hinausfallen; auch ist bei ihnen die Wiederherleitung der wahren Längen meistens umständlich. Darum ist die Perspektive für Studierfiguren bei Untersuchungen wenig geeignet; und wer insbesondere beim Unterrichte den Wunsch hegt, daſs der Anfänger nicht bloſs nachzeichne, sondern die Figuren, die er braucht, fortlaufend selbst entwerfe, der muſs auf die Perspektive verzichten.

(3. Anwendbarkeit von Grund- und Aufriſs.) Im geraden Gegensatz zur Perspektive ist es beim Grund- und Aufriſs besonders leicht, die wahren Maſse einzutragen und wieder abzulesen. Darum leistet diese Doppelprojektion den Werk- und Bauleuten die wichtigsten Dienste. Und zwar nicht erst in neuerer Zeit; vielmehr waren Grund- und Aufriſs, dazu der Steinschnitt (coupe de pierre) schon in den Bauhütten des Mittelalters heimisch und auch im Altertum nicht unbekannt. Ja sogar der schöpferische Gedanke, Grund- und Aufriſstafel an eine gemeinsame Axe zu heften und um diese herum in eine einzige Ebene umzulegen, rührt nicht erst, wie die Franzosen bisweilen vorgeben möchten, von Gaspard Monge her, sondern findet sich u. a. schon bei Albrecht Dürer*) — obwohl Monge

---

*) a. a. O.: Im 1. Buche, „Von den Linien“, konstruiert er aus Grund- und Aufriſs eines Kegels dessen elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Schnitt in wahrer Gestalt.

und seinen Nachfolgern das grofse Verdienst unbestritten bleibt, die darstellende Geometrie im Zusammenhange ausgebildet zu haben. Allein so überaus fruchtbar sie sich in ihrer heutigen Gestalt, auch in theoretischer Hinsicht, erweist, so ist doch auch sie nicht dazu geeignet, dem Anfänger als einzige oder erste Darstellungsart zu dienen, weil ihr die volle Anschaulichkeit fehlt. Verlangt sie doch vom Beschauer, dafs er sich aus zwei getrennten Abbildungen die Vorstellung des einen räumlichen Gegenstandes abstrahiere.

(4. Die Parallelprojektion und ihre beiden Hauptregeln.) Sonach bleibt für die Zwecke des ersten Unterrichts kein besseres Darstellungsmittel übrig als die Parallelprojektion mit gutgewählter Strahlenrichtung. Die erste Auffassung von dieser kann schnell und sicher so erworben werden. In ein bespanntes Reifsbrett stecke man zwei Nadeln in beliebiger aber gleicher Richtung. Darauf lasse man das Ganze so ins Sonnenlicht halten, dafs die Schatten beider Nadeln zu Pünktchen zusammenschrumpfen; dann zeigen die Nadeln die Richtung der Sonnenstrahlen an, die als parallele Projektionsstrahlen gelten dürfen. Nun halte man vor das Blatt ein beliebiges Körpermodell, entweder aus Drähten oder in solcher Weise aus starkem Papier gefertigt, dafs von jedem Felde, als wäre es ein Thürflügel, die Füllung herausgeschnitten und nur der Rahmen stehn gelassen ist. (Solche „durchbrochene“ Modelle kosten kaum mehr Mühe als die gewöhnlichen vollen und werden von Schülern mit Lust hergestellt.) Der Schatten, der jetzt im Sonnenlichte entsteht, ist die gewünschte Parallelprojektion und wird eingehend studiert, indem man erst die Lage des Körpers, dann die der Strahlen gegen die Bildtafel beliebig abändert.

Wer nun solche Bilder ohne sinnliche Hülfe entwerfen will, der reicht mit der einen fast selbstverständlichen Regel aus:

parallele Gerade haben parallele Bilder.

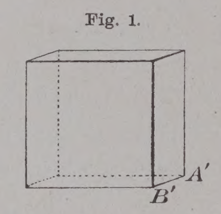
Aus ihr fliefsen ohne Weiteres als Zusätze die Regeln: das Bild eines Parallelogramms ist wieder ein Parallelogramm, oder auch: parallele und gleiche Strecken haben parallele und gleiche Bilder; und endlich:

parallele, verschieden lange Strecken haben proportionale Bilder.

Nach diesen beiden Regeln, des Parallelismus und der Proportionalität, geht die Ausführung leicht von statten.

(5. Die Schrägprojektion insbesondere.) Ist etwa ein Würfel abzubilden, dessen Grund- und Deckfläche parallel zur Bildtafel (etwa einer Zimmerwand) stehen, so werden bei jedweder Strahlenrichtung die Projektionen beider Flächen zwei Quadrate werden, die sowohl einander, als den Flächen im Raume, kongruent sind. Die Projektionen der vier Würfelwände aber schrumpfen, wenn die Strahlen normal einfallen, zu Strichen zusammen, — man erhält dann den gewöhnlichen Aufriſs, und die Anschaulichkeit geht verloren; läſst man dagegen die Strahlen nur ein wenig schief auftreffen, so geben die vier nach vorn gehenden Kanten Bilder ($A'B'$ u. s. w.),

Fig. 1.



deren Richtung und Länge, wie sofort einleuchtet, beliebig gewählt werden darf, je nach Azimut und Höhe der Sonnenstrahlen, die man sich denkt.

Mit Recht werden diese Schrägbilder, wie ich sie kurz nennen will, für die Zwecke des Unterrichts immer mehr verwendet und empfohlen. Von ausführlicheren Arbeiten in diesem Sinne erwähne ich nur die von Brude*) und das überaus anregende Werk von Holzmüller.**) Auch im Krystallzeichnen ist z. B. die Zirkelsche Mineralogie, nachdem früher z. B. Naumann und Mohs andere Arten von Figuren bevorzugt hatten, zu den Schrägbildern zurückgekehrt.

(6. Einfachste Begründung der Schrägprojektion.) Um diese höchst bequeme Darstellungsart so einfach wie möglich

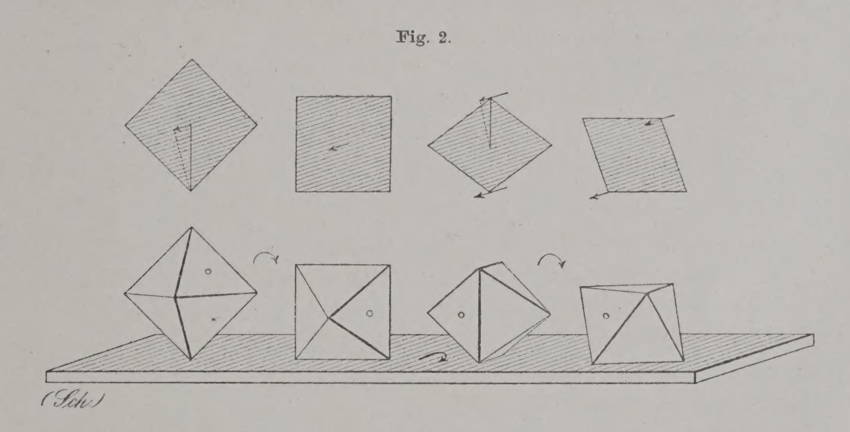
---

*) Adolf Brude, Das Zeichnen der Stereometrie. Stuttgart, Mayer 1872.

**) Gustav Holzmüller, Einführung in das stereometrische Zeichnen, Teubner 1886.

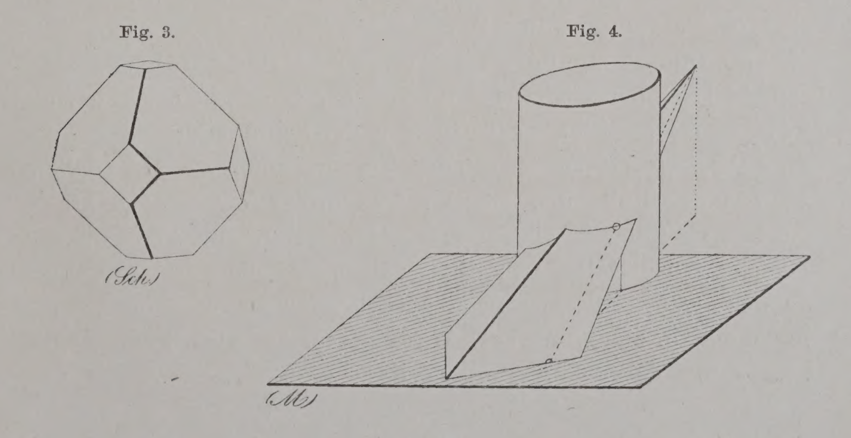
zu begründen, schlage ich folgendes Verfahren vor. Parallel zur Bildtafel werde eine Schnittebene durch den Körper gelegt (wenn er ein Centrum hat, dann durchs Centrum hindurch); nach allen Punkten aber aufserhalb dieser Schnittebene denke man sich Lote hingeführt. Sonach hat man nur zweierlei abzubilden: die Schnittfigur und die Lote; jene giebt als Bild eine kongruente Figur, diese geben, wie gesagt, Strecken von beliebiger aber gleicher Richtung, beliebiger aber gleicher Verkürzung. So entstehen beispielsweise folgende Schrägbilder von Oktaedern, die der Reihe nach auf einer Ecke, Kante oder Fläche ruhen:

Fig. 2.



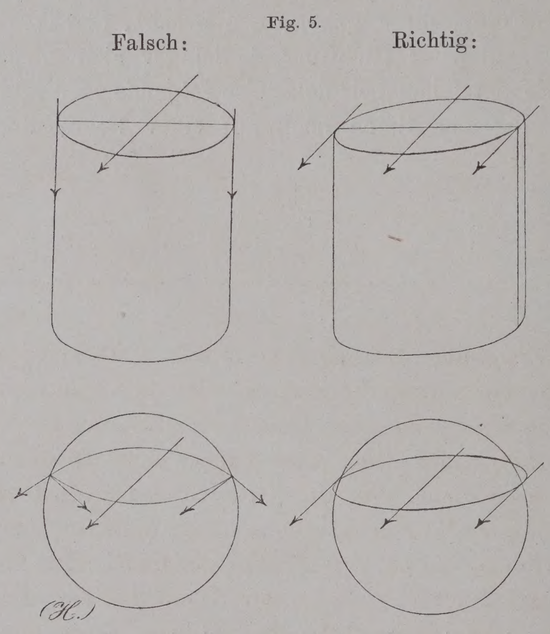
Und an den einmal gewonnenen Bildern der Körper lassen sich leicht allerhand Schnitte und Durchdringungen darstellen.

Fig. 3. Fig. 4.



(7. Bilder, die mit der Regel vom Parallelismus unvereinbar sind.) Die bloſse fortgesetzte Anwendung der Regel vom Parallelismus wird den Zeichner u. a. schützen vor unzulässigen Kreisbildern, namentlich vor jenen spitzigen spindelförmigen, die in populären Geographiebüchern noch immer ihr Wesen treiben:

Fig. 5.

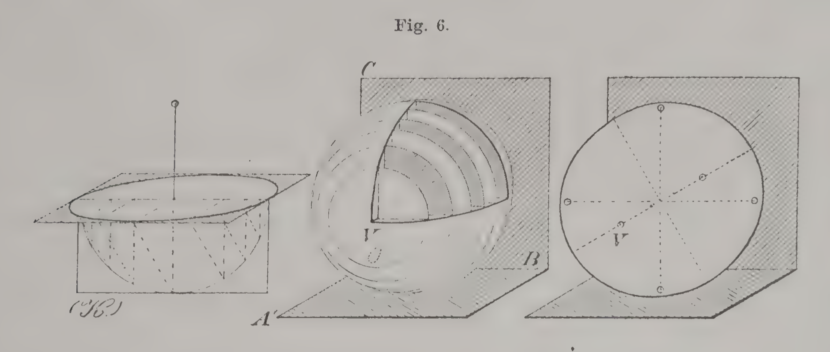


In den falschen Figuren zeigen die Pfeile gerade Linien an, die im Raume parallel gemeint sind, die es aber im Bilde nicht sind, wie sie doch sollten.

(8. Die Schrägbilder von Kreis und Kugel und ihre Nachteile.) Die allermeisten Lehrbücher der Stereometrie, von Legendre an bis jetzt, bedienen sich der Schrägbilder — bis an die Stelle, wo sie zu den runden Körpern kommen. Dort fallen sie aus der Rolle und geben Normalprojektionen, z. B. kreisrunde Kugelbilder. Diesen Wechsel der Darstellungsart mögen manche Schriftsteller unbewuſst vollzogen haben, fast alle thun es wenigstens stillschweigend; ausdrücklich hervorgehoben finde ich ihn u. a. bei Komerell-Hauck. Ist das auch nicht folgerecht gehandelt, so ist es doch sehr erklärlich. Denn die

Schrägprojektion liefert vom wagerechten Kreise und von der Kugel Bilder, die zur Vertikalen unsymmetrisch liegen und die bei aller geometrischen Unanfechtbarkeit dem natürlichen Gefühl mifsfallen. Ihre sehr einfache Konstruktion zeigen die nachstehenden Figuren:

Fig. 6.



Das Kugelbild insbesondere erhält man rasch mit Hilfe einer Reihe von Parallelkreisen, die sich in wahrer Gestalt und Gröfse abbilden, wobei der Umrifs des Kugelbildes von selber entsteht. Aber auch ohne diese Kreise wird der Umrifs leicht gefunden, wenn man die Kugel im vorderen Axenende V von der Bildtafel berührt denkt; denn dann erscheint die Bildtafel als Schnittebene durch den Rotationscylinder der Projektionsstrahlen, die Kugel als eine der Dandelinschen Hilfskugeln, folglich die Schnittkurve als eine Ellipse, deren einer Brennpunkt eben jenes Axenende V ist; die halbe Nebenaxe aber ist dem wahren Kugelradius gleich.

(9. Milderung des Nachteils durch richtiges Beschauen der Schrägbilder.) Allerdings läfst sich der Eindruck des Verzerrten, den das unsymmetrische Kreisbild und das längliche Bild der Kugel auf den Beschauer machen, dadurch beträchtlich mildern, ja aufheben, dafs man beim Konstruieren das Bild der Vorderaxe möglichst kurz, folglich das Kugelbild selber nur schwach excentrisch wählt; namentlich aber dadurch, dafs man die fertigen Schrägbilder auf richtige Art beschaut. Will man nämlich von der vorhandenen Zeichnung einen naturgetreuen Eindruck wiedergewinnen, so mufs auch hier der Blick des Beschauers dieselbe Richtung annehmen, welche beim Er-

zeugen des Bildes die Projektionsstrahlen hatten. In der letzten Figur nun ist OA' das Bild einer Kante OA im Raume, die auf der Ebene BOC normal steht; jetzt halte man (mit der rechten Hand) das Blatt ein wenig schräg, nämlich den linken Rand weiter vom Auge weg, und markiere (mit der linken Hand) durch eine Federspitze im Raume den Endpunkt A. Blickt man sodann — einäugig und aus hinreichender Entfernung — so auf das Blatt, daſs A und A' sich decken, dann wird mit einem Schlag das Kugelbild plastisch und unverzerrt erscheinen.

(10. Vorzug der Normalprojektion; normalaxonometrisches Verfahren.) Immerhin behalten die Schrägbilder von Kreis und Kugel etwas Hartes für das allgemein menschliche Empfinden. Und gleichwie im Gebiete der Perspektive die Maler das elliptische Bild eines Tellerrandes kaum jemals anders gezeichnet haben, als mit einer Hauptaxe parallel zum Horizonte und Rande des Bildes, auch wenn es die Perspektive anders forderte; und wie sie zwei Kugeln nebeneinander, entgegen der perspektivischen Vorschrift, beide als Kreise darstellen, nur um jenen unliebsamen Verzerrungen auszuweichen — so haben sich auch die geometrischen Zeichner von jeher gesträubt, ein Kugelbild anders als kreisrund zu zeichnen.

Dieses kreisrunde Kugelbild aber erreicht die Parallelprojektion in aller Strenge, wenn sie die Strahlen nicht schräg, sondern normal auf die Bildtafeln treffen läſst, dabei aber der Anschaulichkeit halber ein in der Kugel enthaltenes dreifach rechtwinkeliges Axenkreuz in beliebig gekippter Lage gegen die Tafel annimmt.

Hat man nur erst von einem solchen Axenkreuze die Normalprojektion entworfen, so läſst sich in diese hinein das Bild jedes andern Raumpunktes eintragen, wie bei irgend welcher Parallelprojektion, nämlich bloſs durch Parallelenziehen oder allenfalls mit Hilfe von Proportionalmaſsstäben. Es werden an Stelle jedes Punktes im Raume seine drei rechtwinkeligen Koordinaten abgebildet, sodaſs nur Strecken in dreierlei Richtung und in dreierlei Verkürzungsmaſsstab darzustellen sind.

Dieses Verfahren, dessen Vorteil sich überall da zeigt, wo

die Raumobjekte schon von selbst ein orthogonales Axenkreuz besitzen — wie die meisten geometrischen Körper, Krystalle, Gebäude, Geräte — ist, nach den Vorarbeiten von Lambert*), Farish**) und Anderen, von Weisbach in Freiberg ausgebildet worden***), und hat durch ihn den Namen der (normalen) Axonometrie erhalten.

II.

Weisbachs Hauptsatz der Normal-Axonometrie.

(11. Herleitung des Würfelbildes; einerseits mit festgehaltener Tafel und gekipptem Würfel.) Die Hauptaufgabe also, die sich Weisbach stellt, ist die: auf leichte Art und namentlich auch unter willkürlichen Bedingungen wegen rationaler Längenverhältnisse — die Normalprojektion eines dreifach rechtwinkeligen Axenkreuzes zu konstruieren.

Um kurz zu sprechen kann man auch sagen, es sei ein Würfelbild gesucht; denn ein Oktant jenes Axenkreuzes, das man kurz ein tesserales nennen kann, besteht aus drei gleich langen Strecken von einem Punkte her, die aufeinander normal stehen, oder eben aus den Kanten eines Würfeleckraumes. Jacob Steiner nennt gelegentlich†) jenes Raumgebilde kurzweg ein (rechtwinkeliges) Dreibein.

Jede denkbare Gestalt der Normalprojektion eines Würfels oder einer Würfelecke kann man nun ja mit den elementarsten Mitteln der darstellenden Geometrie gewinnen, wenn man die Tafeln festhält und den Würfel nacheinander

---

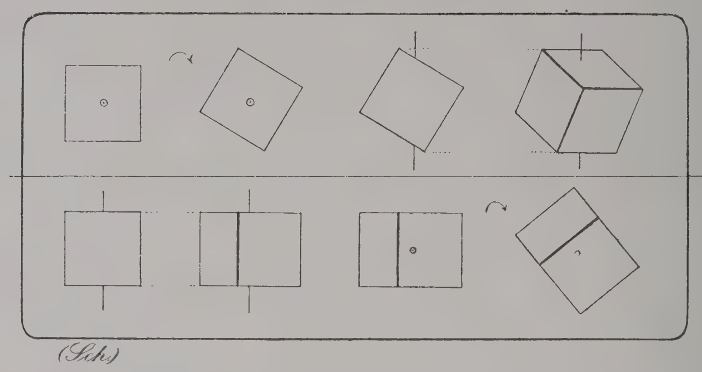
*) Lambert, Freye Perspective, Zürich 1759. 2. Aufl. 1774. 7. Abschn.

**) Farish, Isometrical perspective. In den Transactions der Cambridge philosophical society 1820.

***) Zuerst in den polytechnischen Mitteilungen von Volz und Karmarsch Bd. I., Tübingen 1844, dann in seiner Anleitung zum axonometrischen Zeichnen. Freiberg 1857.

†) Siehe Ges. Math. Abhdlg. von H. A. Schwarz. II. Bd., S. 1. Übrigens redet der dortige Aufsatz nicht von normaler, sondern von schiefer Axonometrie.

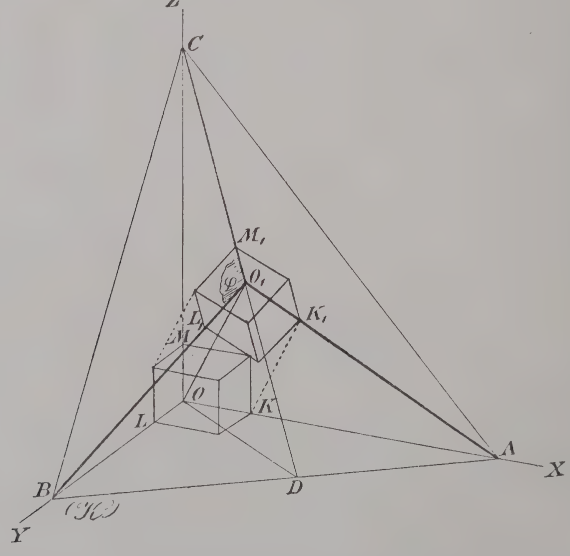
Fig. 7.



zwei Axendrehungen ausführen läſst.

(12. **Andrerseits mit festgehaltenem Würfel und gekippter Tafel.**) Weisbach dagegen, der auf rechnerischem Wege zuletzt eine rein planimetrische Konstruktion erreichen will, hält umgekehrt den Würfel fest und giebt der neuen Bildtafel eine beliebig geneigte Lage, wie seine hier übernommene Figur

Fig. 8.



zeigt. Er sucht eine rein planimetrische Relation zwischen den drei Verkürzungsfaktoren der Axenbilder und ihren Winkeln. Nach seiner Bezeichnung ist

$$O_1K_1 : O_1L_1 : O_1M_1 = m : n : p$$
$$\angle BO_1C = \varphi$$
$$\angle CO_1A = \psi$$
$$\angle AO_1B = \chi.$$

Dann findet er durch Rechnung

$$\cos 2\varphi = -\frac{n^4 + p^4 - m^4}{2n^2p^2}$$
$$\cos 2\psi = -\frac{m^4 + p^4 - n^4}{2m^2p^2}$$
$$\cos 2\chi = -\frac{m^4 + n^4 - p^4}{2m^2n^2}$$

(13. Planimetrische Deutung der gefundenen Relationen. Weisbachs Hauptsatz.) Hierauf fährt er fort: „Sieht man m^2, n^2 und p^2 als die Seiten eines Dreiecks an, so sind dem Bau der gefundenen Formeln zufolge $2\varphi - 180^0$, $2\psi - 180^0$ und $2\chi - 180^0$ die Winkel dieses Dreiecks.

Wenn man in dem aus m^2, n^2 und p^2 konstruierten Dreieck ABC (in der nachstehenden Figur) durch die Linien AO, BO und CO die Winkel

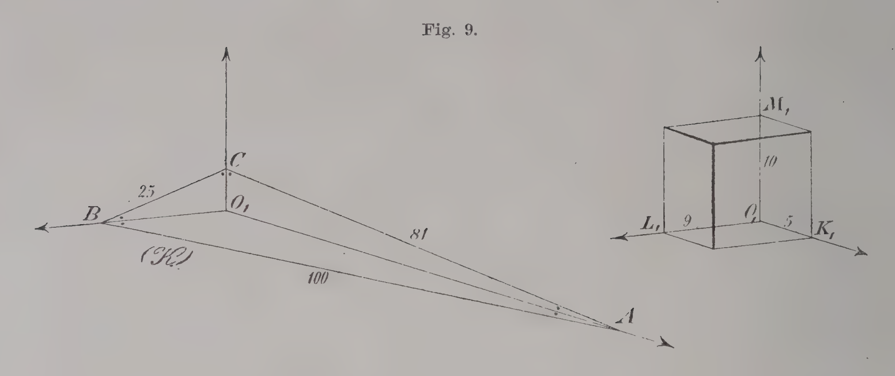
$$A = 2\varphi - 180^0$$
$$B = 2\psi - 180^0 \text{ und}$$
$$C = 2\chi - 180^0$$

halbiert, so schneiden sich die Halbierungslinien OA, OB und OC unter den gesuchten Axenwinkeln, denn es ist

$$\angle BOC = 180^0 - \frac{B + C}{2}$$
$$= 180^0 - \frac{180^0 - A}{2}$$
$$= 90^0 + \frac{A}{2} = \varphi.\text{“} \quad \text{U. s. w.}$$

Sucht man also z. B. Axenbilder im Verhältnis $5 : 9 : 10$, so braucht man nur ein Dreieck zu konstruieren, dessen Seiten sich wie $25 : 81 : 100$ verhalten und die Winkel zu halbieren:

Fig. 9.



dann geben die Halbierenden der Richtung nach die gewünschten Axenbilder.

Dies ist Weisbachs Hauptsatz der Axonometrie. Allein so einfach der Satz selber ist, so umständlich ist sein Beweis.

(14. Spätere Beweise.) Auch K. Pohlke, der in seiner allseitig hochgeschätzten darstellenden Geometrie*) denselben Gegenstand behandelt, bietet keine wesentlich einfachere Herleitung. Seine Endformeln, in denen ξ und v die Winkel zwischen den Axenbildern, $q_x\, q_y\, q_z$ die Verkürzungsquotienten bezeichnen, sind folgende:

$$\operatorname{tg} \xi = \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\,(q_x^2 + q_z^2 - q_y^2)}{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)\,(q_y^2 + q_z^2 - q_x^2)}}$$

$$\operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\,(q_y^2 + q_z^2 - q_x^2)}{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)\,(q_x^2 + q_z^2 - q_y^2)}}$$

was mit den Weisbachschen Formeln identisch ist. Hieraus schließt er ganz so weiter wie Weisbach.

Ein Beweis aus jüngerer Zeit ist mir nicht bekannt geworden; das ist auch sehr erklärlich, weil auf diesem Gebiete die konstruktive Behandlung wie billig immer mehr die rechnende verdrängt. So sind namentlich G. v. Peschkas**) Original-

*) Berlin 1859. In der 3. Aufl. vom J. 1872, in der I. (einzigen) Abteilung auf S. 89—92.

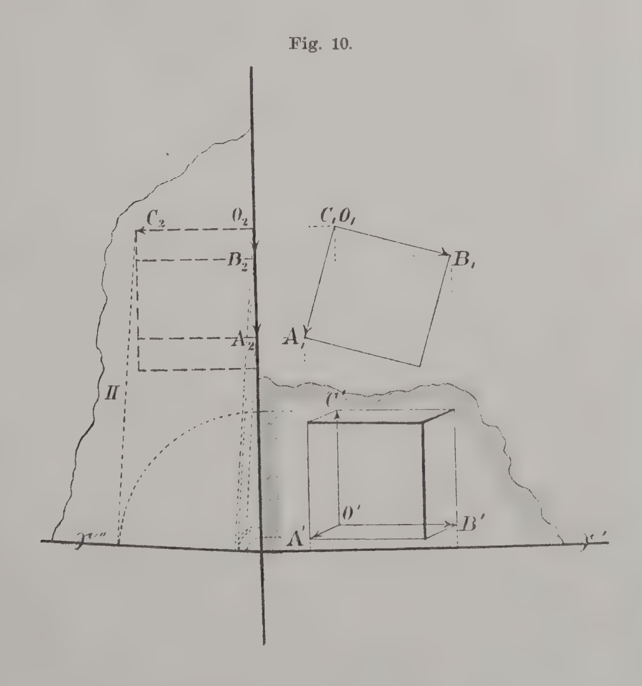
**) G. v. Peschka, Graphische Lösung der axonometrischen Probleme. Im 19. Bande der Zeitschr. deutscher Ingenieure, Berlin 1875. Aufgenommen in sein inhaltreiches Buch, Darstellende und projective Geometrie. Erste Aufl., Wien 1883. S. I. Band, S. 395—400.

arbeiten über die 3 normalaxonometrischen Aufgaben (je nachdem von den Längen und den Winkeln der Axenbilder die einen oder andern Stücke gegeben sind) rein konstruktiver Natur.

Immerhin aber verlangt der Weisbachsche Hauptsatz seiner Einfachheit wegen auch einen einfachen Beweis, und ein solcher läſst sich in der That mit fast keiner Rechnung durchführen. Zuvor jedoch muſs Hand in Hand damit eine vereinfachte Konstruktion des Würfelbildes gegeben werden.

(15. Einfachere Konstruktionen des Würfelbildes: Verteilung der beiden nötigen Drehungen.) Ein naheliegender Gedanke ist der, daſs man die beiden Drehungen, die man braucht, um Würfel und Bildtafel in jede beliebige Lage gegeneinander zu bringen, weder mit dem Würfel allein, noch mit der Tafel allein vornimmt, sondern die eine Drehung mit der Tafel, die andere mit dem Würfel. Dazu empfehle ich folgende Anordnung, die das gewünschte Würfelbild gleich in bequemer Lage liefert:

Fig. 10.



Hierbei bedeutet Tafel II eine seitwärts umgelegte Aufrifs-tafel, $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ die Spuren der Bildtafel, die man nach hinten zu niederklappt. Diese übersichtliche Konstruktion habe ich jahrelang benutzt; auf Grund derselben haben Schüler von mir mehr oder minder einfache Beweise für Weisbachs Satz abgeleitet, u. a. Hans Lorenz, jetzt Ingenieur in Zürich.

Indessen läfst die Konstruktion und im Verein damit auch die Rechnung noch weitere Vereinfachung zu.

(16. Zusammenlegung des Nullpunktes mit seinem Bilde.) Der zweite schlichte Gedanke nämlich, der die Konstruktion vereinfacht, ist der: den Nullpunkt O des Axenkreuzes in die Bildtafel selber hineinzulegen, so dafs er mit seinem Bilde O' zusammenfällt.

Die nächstfolgende Darstellung führt hin zu einem schönen Satze, den Professor H. A. Schwarz in Göttingen (als Anhang zu der vorhin erwähnten Abhandlung) ohne Beweis mitteilt*) und der von „seinem verehrten Lehrer Pohlke“ herrührt.

Ich projiciere der Reihe nach folgende Gebilde normal auf die Tafel:

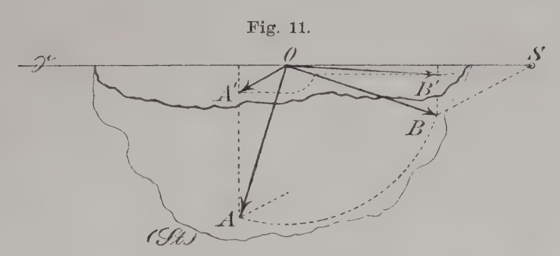
α) zwei normale gleichlange Strecken aus einem Punkt (oder ein „Zweibein“);
β) den Kreisquadranten zwischen ihnen;
γ) die drei Kanten einer Würfelecke (das „Dreibein“); und
δ) den Kugeloktanten dazwischen.

Aufgabe α). Punkt O liege in der Zeichenebene E, die als Bildtafel gelten soll. Durch O hindurch ist in der Tafel die Gerade $\mathfrak{S}$ gezogen; sie sei die Spur einer schrägen Ebene, in welcher die normalen und gleich langen Strecken OA, OB liegen. Der Linienzug AOB sei sowohl in die Tafel umgelegt, als auch normal auf sie projiciert. Die Projektion $A'OB'$ — affin mit AOB — wird auf bekannte Weise gefunden: entweder mit Hülfe des Angelpunktes S, oder indem man die Spurlote aus A und aus B proportional verkürzt, was am bequemsten mittels zweier concentrischer Kreise geschieht.

---

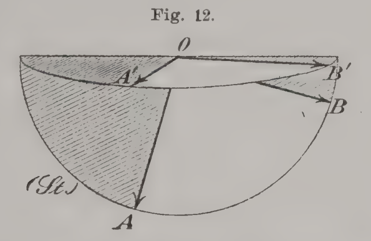
*) H. A. Schwarz, Ges. Math. Abh. II. Bd., S. 7; bei diesem Satze aber ist nunmehr Normal-Axonometrie gemeint.

Fig. 11.



Aufgabe β). Um ferner den Kreisquadranten $\widehat{AB}$ zu projicieren, hat man nur fortzufahren und die Kreisordinaten (die Spurlote) in gleicher Weise zu verkürzen: man erhält so als Kreisbild

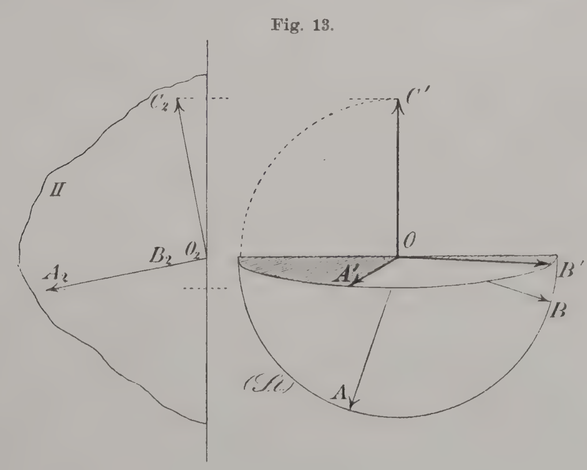
Fig. 12.



eine Ellipse, und OA', OB' sind in ihr conjugierte Halbmesser.

Aufgabe γ). Jetzt ist nun von der dritten normalen Strecke OC, die $= OA = OB$ ist, die Normalprojektion zu konstruieren. Zu diesem Zwecke werde links eine seitliche Aufrißtafel zugefügt und seitwärts umgelegt in die Zeichenebene E — eine Hilfskonstruktion übrigens, die nur der bequemeren Auffassung dienen soll, und die zur Konstruktion von OC' selber nicht gebraucht wird.

Fig. 13.



Ein Blick auf die Figur zeigt, dafs OC' gleich der Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, das zur andern Kathete und zur Hypotenuse die kleine und grofse Halbaxe der gefundenen Ellipse hat; mit anderen Worten, dafs OC' der linearen Excentricität dieser Ellipse gleich ist. Man hat demnach den schönen Satz:*)

Sind OA' und OB' konjugierte Halbmesser einer Ellipse, und ist OC' gerichtet wie ihre Nebenaxe und so lang wie ihre Excentricität: dann sind OA' OB' OC' die Normalprojektionen dreier Strecken im Raume, die auf einander normal und gleich lang sind.

Aufgabe δ). Diesen Satz braucht man nur dreimal zu benutzen, so hat man das vollständige Bild einer Kugel, samt den drei Hauptkreisen in den Koordinatenebenen. Denn normal zu jedem der drei Axenbilder hat man die Hauptaxe eines elliptischen Hauptkreisbildes; die Hauptscheitel liegen auf dem Umrifs des Kugelbildes, und die Länge der halben Nebenaxe folgt aus dem vorigen Satz. Siehe Figur Nr. 16.

(17. Neuer Beweis für den Weisbachschen Satz.) Jetzt endlich, auf Grund dieser Konstruktion, läfst sich die angekündigte kurze Rechnung führen, zum Beweise des Weisbachschen Satzes.

Fig. 14.

*) Vergl. die vorige Anmerkung.

Es seien die Längen

$$OA' \quad OB' \quad OC'$$

mit $\quad a \quad b \quad c$

bezeichnet; OV sei die Rückverlängerung von OC', und sodann

$$\angle VOA = \varphi \qquad \angle VOA' = \varphi'$$
$$\angle VOB = 90^0 - \varphi = \psi \qquad \angle VOB' = \psi',$$

sodafs

$$\angle \varphi' = 180^0 - (ca)$$
$$\angle \psi' = 180^0 - (bc)$$

ist. Nun sind die beiden Rechtecke, deren Diagonalen OA und OB sind, einander kongruent; folglich haben auch ihre Projektionen, weil der Neigungswinkel im Raume beide Male derselbe ist, gleichen Inhalt, das sind die Rechtecke mit der Diagonale OA' einerseits und OB' andrerseits. Oder in Formel:

$$\square\,(OA) \simeq \square\,(OB)$$
$$\square\,(OA') = \square\,(OB')$$
$$(OA' \sin\varphi')\,(OA' \cos\varphi') = (OB' \sin\psi')\,(OB' \cos\psi')$$
$$OA'^2 : OB'^2 = \sin 2\psi' : \sin 2\varphi'$$
$$a^2 : b^2 = \sin 2(bc) : \sin 2(ca).$$

Wegen der vollen Gleichberechtigung der drei Axen aber darf man weiter schliefsen:

$$\boldsymbol{a^2 : b^2 : c^2 = \sin 2(bc) : \sin 2(ca) : \sin 2(ab).}$$

Mit Worten: In der Normalprojektion eines tesseralen Axenkreuzes verhalten sich die Quadrate der drei Verkürzungsfaktoren wie die Sinus der doppelten Axenwinkel; dies ist aber nichts anderes als Weisbachs Satz im obigen Art. 13.

(18. Verifikation für die dritte Axenlänge.) Zum Überflufs will ich dies Ergebnis noch durch eine andere Rechnung verificieren. Die Variabeln a b c φ' ψ' hangen ab von drei Gröfsen: der wahren Radiuslänge l, dem Azimut φ und dem Neigungswinkel N der schrägen Ebene. Und zwar ist

$$\begin{array}{ll|c|c|c}
a \sin \varphi' = l \sin \varphi \cdots\cdots\cdot & (1) & : & (\ )^2 & \\
a \cos \varphi' = l \cos \varphi \cos N & (2) & : & & (\ )^2 \\
b \sin \psi' = l \cos & (3) & \times & +(\ )^2 & \\
b \cos \psi' = l \sin \varphi \cos N & (4) & \times & & +(\ )^2 \\
c \quad\ = l \sin N & (5) & & & +(\ )^2 \\
\hline
\end{array}$$

Es gilt nun aus diesen fünf Gleichungen l, φ und N zu eliminieren, sodafs zwei Relationen zwischen $a\ b\ c\ \varphi'$ und ψ' übrig bleiben. Zunächst liefern die ersten vier Gleichungen wiederum denselben Quotienten von Rechtecken, der vorhin betrachtet worden ist:

$$\frac{b^2 \sin 2\psi'}{a^2 \sin 2\varphi'} = 1$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\psi'}$$

$$= \frac{\sin 2(ca)}{\sin 2(bc)} \cdots\cdots (6)$$

Ferner ist

$$\begin{array}{ll|c|c}
a^2 \sin^2 \varphi' + b^2 \sin^2 \psi' \qquad = l^2 \cdots\cdots\cdots\cdots & (7) & - & + \\
a^2 \cos^2 \varphi' + b^2 \cos^2 \psi' + c^2 = l^2 & (8) & + & + \\
\hline
\end{array}$$

$$c^2 = -\, a^2 \cos 2\varphi' - b^2 \cos 2\psi'$$

$$\frac{c^2}{a^2} = -\cos 2\varphi' \quad - \frac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\psi'} \cos 2\psi'$$

$$= - \frac{\sin 2(\varphi' + \psi')}{\sin 2\psi'}$$

$$= + \frac{\sin 2(ab)}{\sin 2(bc)} \cdot\cdot (9)$$

(6) und (9) zusammen bestätigen die Proportion aus der vorigen Nummer. Auch diese Rechnungen sind immer noch kürzer als die bei Weisbach und Pohlke.

Beiläufig bemerkt lassen sich aus (1) bis (5) alle sonstigen Relationen zwischen l, a, b, c, φ, N, φ' und ψ' ableiten; insbesondere folgt aus den Gleichungen (7) und (8), wenn sie nicht subtrahiert, sondern addiert werden, die praktisch wertvolle bekannte Relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\, l^2$$

$$l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

Wenn man also z. B. Axenbilder mit den Längenverhältnissen

$$a : b : c = 5 : 9 : 10$$

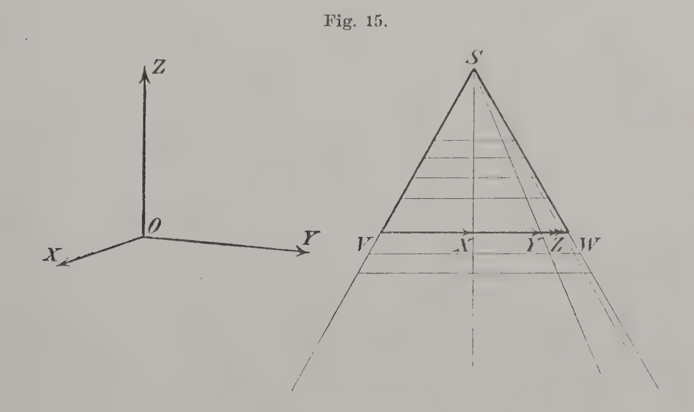
wünscht, so wird

$$a : b : c : l = 5 : 9 : 10 : \sqrt{103}.$$

(19. Schlufsbemerkung. Anwendung des axonometrischen Würfelbildes.) Die vorstehenden Rechnungen und Weisbachs darauf gegründete planimetrische Konstruktion des Axenbildes (siehe Art. 13) gewährt in solchen Fällen einigen Vorteil, wo es dem Zeichner auf zahlenmäfsig vorgeschriebene Verhältnisse der Axenlängen (5 : 9 : 10 oder andere) und auch darauf ankommt, aus der fertigen Zeichnung die wahren Längen der Koordinaten leicht entnehmen zu können. Darum hat jene planimetrische Konstruktion Beifall gefunden bei Krystallographen; auch hat Professor A. Weinhold seine schönen Apparat-Abbildungen in seiner Vorschule der Experimentalphysik und in den Physikalischen Demonstrationen (Leipzig, Quandt & Händel) danach entworfen.

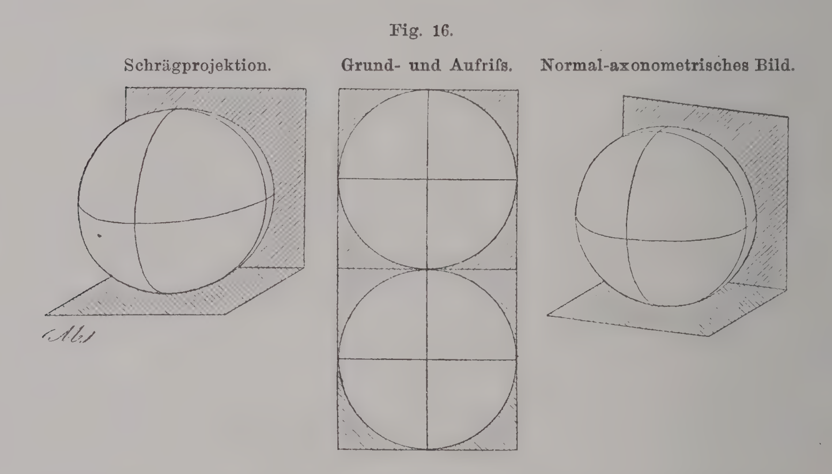
Indessen oft werden solche Zahlenverhältnisse gar nicht gebraucht; dann darf man auf alle Rechnung verzichten und kann sich rascher und ganz nach Bedarf ein Würfelbild durch die Konstruktion verschaffen, die in Art. 16 angegeben ist. Übrigens kann man gleichwohl bei jedem solchen richtig konstruierten Würfelbilde leicht von den wahren Längen zu den in dreierlei Mafsstabe verkürzten Längen übergehen, also die wahren Koordinaten richtig verkürzen und dann eintragen, und umgekehrt aus den Koordinaten in der fertigen Zeichnung die wahren Längen wiederfinden — wenn man nur einen einfachen Proportionalmafsstab, etwa den nachstehenden

Fig. 15.



benutzt, in welchem z. B. $VW = VS$ eine wahre Länge, VX dagegen deren „Verkürzung im X-Maſsstab“ (für die X-Richtung) u. s. w. bedeutet. Mit geringer Übung gelangt man dann bald dahin, für beliebige Raumgebilde anschauliche Figuren zu entwerfen. Als kleine Beispiele dafür gebe ich hier in Fig. 16 das Bild einer Kugel, geteilt in Oktanten, und ferner auf der lithographischen Tafel die Eingangsfigur für die stereometrische Kegelschnittslehre. Zum Vergleiche sind linker Hand Grund-

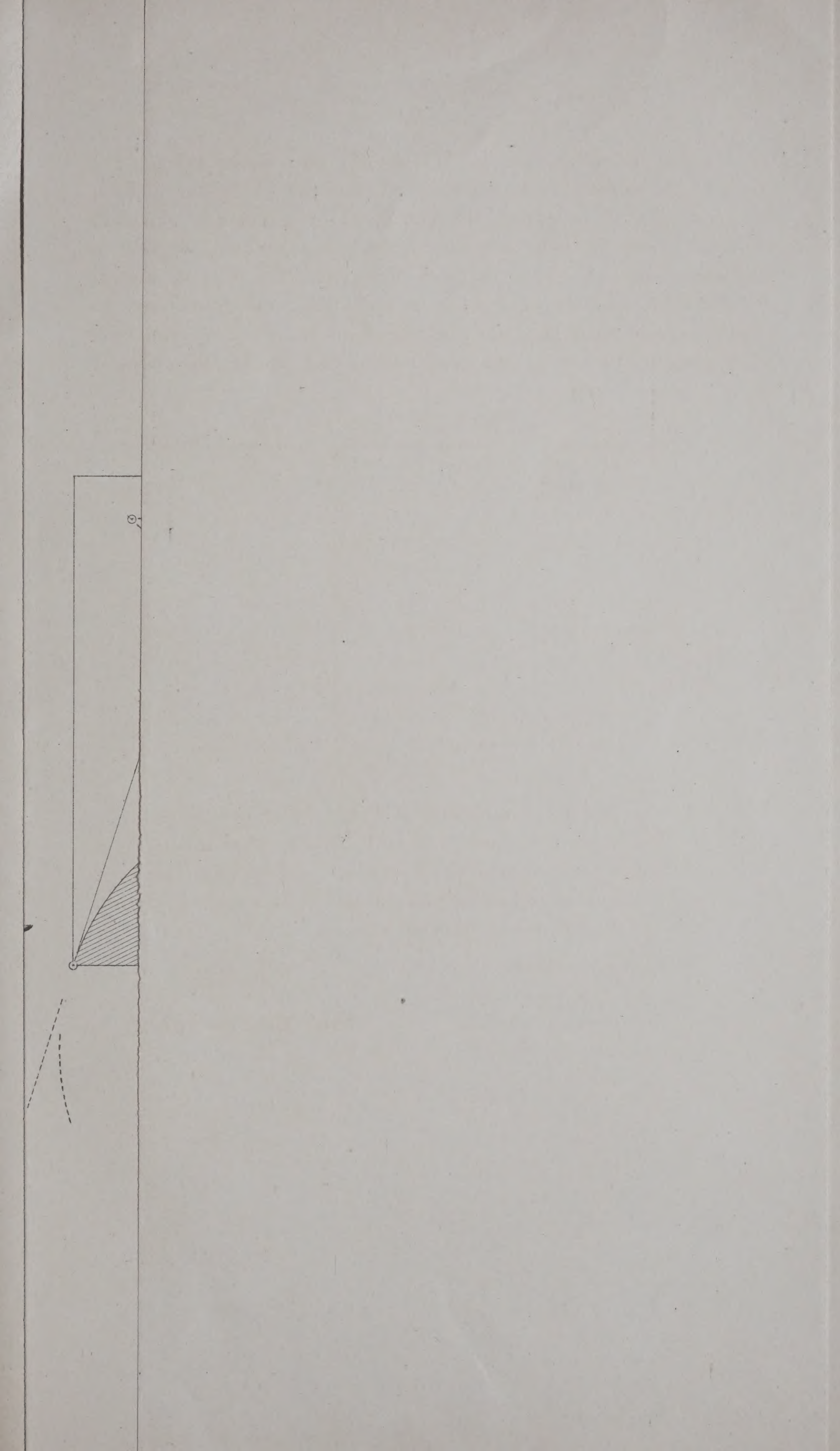
Fig. 16.

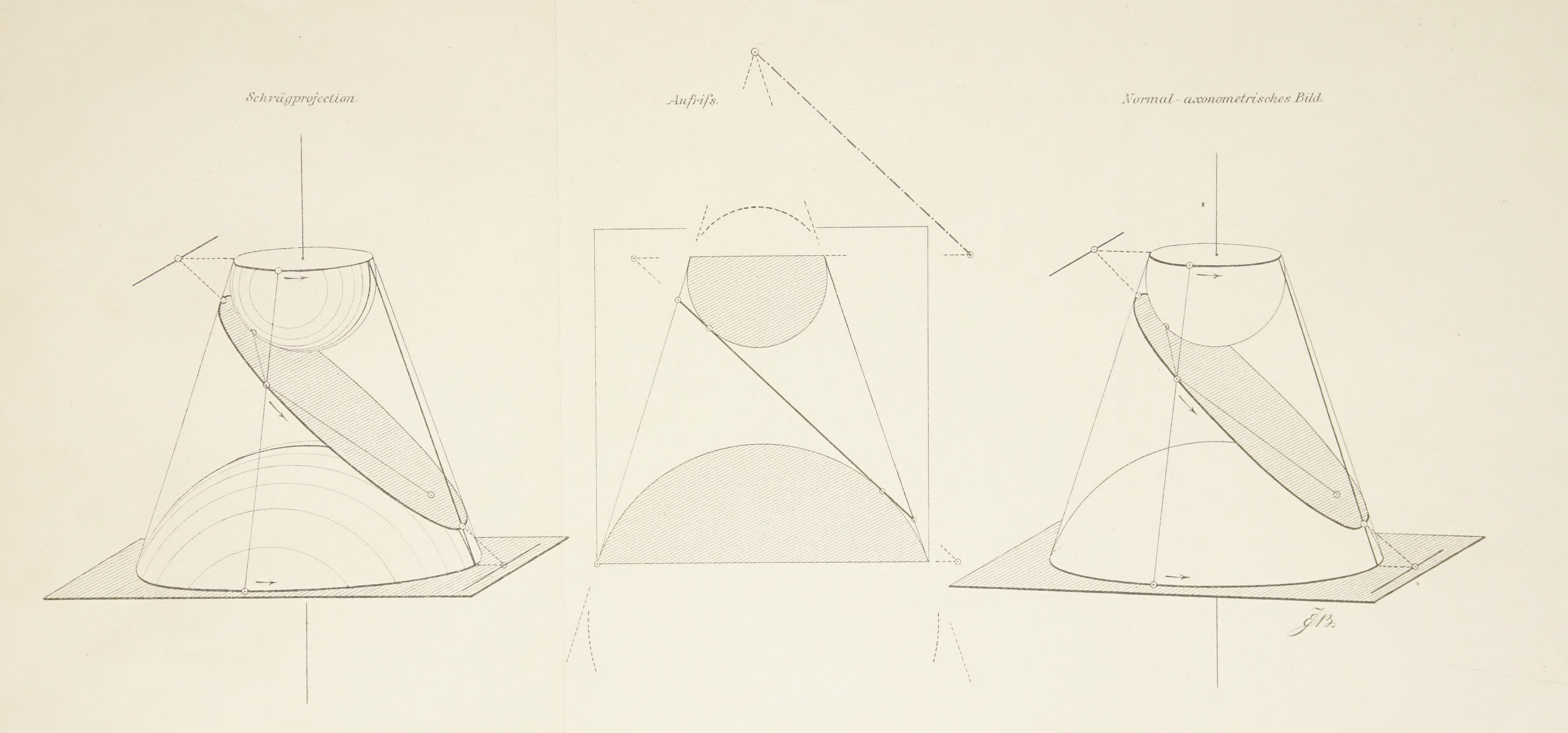


und Aufriſs und das Schrägbild zugefügt. Für die Betrachtung dieser Projektionen erlaube ich mir an das zu erinnern, was vom richtigen Beschauen der Schrägbilder (in schräger Richtung) unter Nr. 9 gesagt ist, während man auf die Normalprojektionen rechter Hand gradaus zu blicken hat.

Leipzig, im September 1893.

Joh. Ed. Böttcher.





Zu Böttcher, Normal-Axonometrie.



